

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
 विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
 पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
 'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: **मन्मथ धर्म प्रणेता**

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

दीर्घवृत्त (Ellipse)

Our notion of symmetry is derived from the human face.

परिभाषा

दीर्घवृत्त एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो समतल में इस प्रकार गमन करता है कि उसकी समतल में स्थित एक निश्चित स्थिर तथा निश्चित रेखा (जो कि स्थिर बिन्दु से नहीं गुजरती हो तथा सभी बिन्दु तथा रेखा एक ही समतल में हो) से लम्बवत् दूरी का अनुपात अचर हो, जो कि एक से कम होता है।

जहाँ,

स्थिर बिन्दु **नाभि** कहलाता है।

स्थिर रेखा **नियता** कहलाती है।

अचर अनुपात **उत्केन्द्रता** कहलाती है, जिसे **e** से निरूपित किया जाता है।

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण

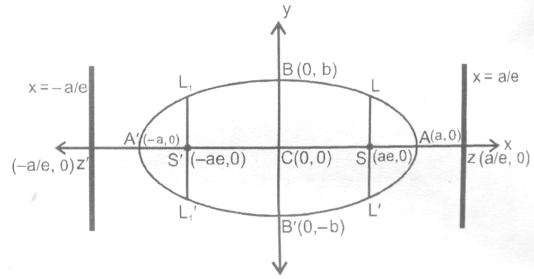
दीर्घवृत्त का मानक समीकरण जिसके मुख्य अक्ष निर्देशांक अक्षों के अनुदिश हो :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ जहाँ } a > b \text{ \& } b^2 = a^2(1 - e^2).$$

$$\text{उत्केन्द्रता : } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, (0 < e < 1)$$

नाभियों : $S \equiv (ae, 0)$ तथा $S' \equiv (-ae, 0)$.

नियताओं के समीकरण $x = \frac{a}{e}$ तथा $x = -\frac{a}{e}$.



दीर्घअक्ष : रेखाखण्ड $A'A$ जिस पर नाभियों S' तथा S स्थित हो तथा जिसकी लम्बाई $2a$ एवं दीर्घवृत्त कहलाती है जहाँ $(a > b)$, दीर्घवृत्त तथा नियता का प्रतिच्छेद बिन्दु नियता (Z) का पाद कहलाता है।

लघुअक्ष : y -अक्ष दीर्घवृत्त को बिन्दु $B' \equiv (0, -b)$ एवं $B \equiv (0, b)$ पर प्रतिच्छेद करता है। रेखाखण्ड $B'B$ जिसकी लम्बाई $2b (b < a)$ हो दीर्घवृत्त का लघुअक्ष कहलाता है।

मुख्य अक्ष : दीर्घअक्ष तथा लघुअक्ष दोनों एक साथ दीर्घवृत्त के मुख्य अक्ष कहलाते हैं।

शीर्ष : दीर्घवृत्त तथा दीर्घअक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु $A' \equiv (-a, 0)$ तथा $A \equiv (a, 0)$ शीर्ष कहलाते हैं।

नाभीय जीवा : दीर्घवृत्त की वह जीवा जो नाभि से गुजरती हो, नाभीय जीवा कहलाती है।

द्विकोटि : दीर्घअक्ष के लम्बवत् जीवा, द्विकोटि कहलाती है।

नाभिलम्ब : वह नाभीय जीवा जो दीर्घअक्ष के लम्बवत् हो नाभिलम्ब कहलाती है।

$$\text{नाभिलम्ब की लम्बाई (LL')} = \frac{2b^2}{a} = \frac{(\text{लघु अक्ष})^2}{\text{दीर्घ अक्ष}} = 2a(1 - e^2) \\ = 2e(\text{नाभि की उसके संगत नियता से दूरी})$$

केन्द्र : वह बिन्दु जो शाकव की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है जो इस बिन्दु से गुजरती हैं, शाकव का केन्द्र कहलाता है। दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्र $C \equiv (0, 0)$ मूल बिन्दु है।

नोट :

(i) यदि दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ द्वारा दिया गया है तथा कुछ भी परिभाषित नहीं किया हो, तो $a > b$ लिया जाता है।

(ii) यदि $b > a$ दिया गया हो, तो y -अक्ष दीर्घअक्ष तथा x -अक्ष लघुअक्ष होगा तथा अन्य सभी बिन्दु एवं रेखाएँ इसके अनुसार परिवर्तित हो जायेंगे।

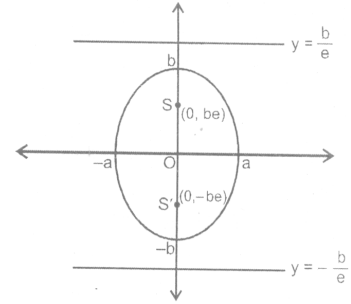
$$\text{समीकरण : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{नाभियां } (0, \pm be) \text{ नियता : } y = \pm \frac{b}{e}$$

$$a^2 = b^2(1 - e^2), a < b \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

$$\text{शीर्ष } (0, \pm b); \quad \text{नाभिलम्ब } y = \pm be$$

$$l(\text{L.R.}) = \frac{2a^2}{b}, \text{ केन्द्र : } (0, 0)$$



सहायक वृत्त / उत्केन्द्रीय कोण :

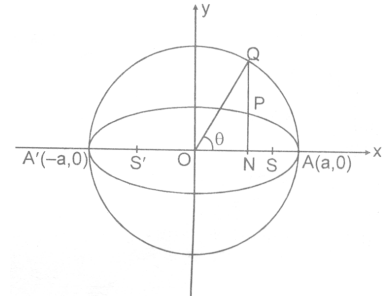
किसी दीर्घवृत्त के दीर्घअक्ष को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त **सहायक वृत्त** कहलाता है।

माना कि सहायक वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर एक बिन्दु Q इस प्रकार है कि Q से गुजरने वाली X-अक्ष के लम्बवत् सरल रेखा दीर्घवृत्त को P पर प्रतिच्छेद करते है तो बिन्दु P तथा Q क्रमशः दीर्घवृत्त तथा सहायक वृत्त पर स्थित संगत बिन्दु कहलाते $\theta (-\pi < \theta \leq \pi)$ को दीर्घवृत्त पर स्थित बिन्दु P का **उत्केन्द्रीय कोण** कहते है।

$Q \equiv (a \cos \theta, b \sin \theta)$ $P \equiv (a \cos \theta, b \sin \theta)$ ध्यान रहें:

$$\frac{l(\text{PN})}{l(\text{QN})} = \frac{b}{a} = \frac{\text{अर्ध लघुअक्ष}}{\text{अर्ध दीर्घअक्ष}}$$

नोट : यदि वृत्त पर स्थित प्रत्येक बिन्दु से एक स्थिर व्यास पर लम्ब खींचे जाते है, तब इन लम्बों को दिए गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त है जिसका सहायक वृत्त दिया गया वृत्त है।



प्राचलिक निरूपण :

समीकरण $x = a \cos \theta$ एवं $y = b \sin \theta$ एक साथ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को प्रदर्शित करते है।

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

जहाँ θ प्राचल है। ध्यान रखें कि यदि $P(\theta) \equiv (a \cos \theta, \sin \theta)$ दीर्घवृत्त पर स्थित हो, तो $Q(\theta) \equiv (a \cos \theta, \sin \theta)$ सहायक वृत्त पर स्थित होगा।

दीर्घवृत्त के उत्केन्द्रीय कोण α एवं β वाले दो बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

दीर्घवृत्त के सापेक्ष बिन्दु की स्थिति :

बिन्दु $P(x_1, y_1)$, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$ या $= 0$ के अनुसार दीर्घवृत्त के बाहर, या अन्दर या इस पर स्थित होगा।

रेखा और दीर्घवृत्त :

सरल रेखा $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को दो वास्तविक बिन्दुओं संपाती बिन्दु या काल्पनिक बिन्दुओं पर मिलती है यदि $c^2 <, =$ या $a^2m^2+b^2$ हो।

इस प्रकार $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा है यदि $c^2=a^2m^2+b^2$

स्पर्श रेखा :

(a) प्रवणता रूप : m के सभी मानों लिए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ है।

(b) बिन्दु रूप : बिन्दु (x_1, y_1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ है।

(c) प्राचलिक रूप : बिन्दु $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ पर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा $\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$ है।

नोट :

(i) दीर्घवृत्त की समान m वाली दो स्पर्श रेखाएँ हैं अर्थात् किसी दी गई दिशा में दो स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं। ये स्पर्श रेखाएँ व्यास के सिरो पर दीर्घवृत्त को स्पर्श करती हैं।

(ii) बिन्दु α तथा β पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(a \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}, b \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \right)$ है।

(iii) दो समान्तर स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं का उत्केन्द्रीय कोण π के अंतर पर होता है।

अभिलम्ब :

(i) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$ है।

(ii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण $ax \sec \theta - by \operatorname{cosec} \theta = (a^2 - b^2)$ है।

(iii) अभिलम्ब का इसकी प्रवणता m के पदों में समीकरण $y = mx - \frac{(a^2 - b^2)m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}}$ है।

स्पर्श रेखा युग्म :

किसी बिन्दु (x_1, y_1) से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के युग्म का समीकरण $SS_1 = T^2$ द्वारा दिया जाता

है, जहाँ $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$; $S_1 \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$; $T \equiv \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$

नियामक वृत्त :

उन स्पर्श रेखाओं जो एक दूसरे को समकोण पर मिलती हैं, के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ नियामक वृत्त कहलाता है। इस बिन्दुपथ का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ है अर्थात् वह वृत्त जिसका केन्द्र दीर्घवृत्त का केन्द्र तथा त्रिज्या, दीर्घवृत्त तथा लघुअक्ष के

सिरों को मिलाने वाली रेखा की लम्बाई के बराबर है।

स्पर्षी जीवा :

बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गई स्पर्ष रेखाओं की स्पर्ष जीवा का समीकरण

$$T=0, \text{ जहाँ } T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

जीवा जिसका मध्य बिन्दु दिया गया हो :

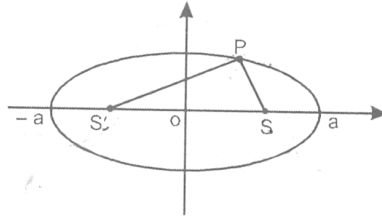
दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की उस जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु (x_1, y_1) हो, $T=S_1$ है,

$$\text{जहाँ } S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 ; \quad T \equiv \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

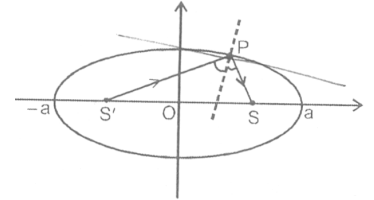
महत्वपूर्ण मुख्य बिन्दु :

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के सन्दर्भ में

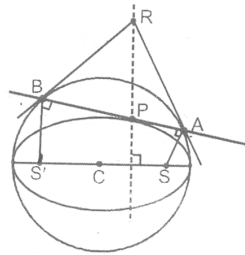
- यदि दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु P है जिसकी नाभियाँ S तथा S' हो, तो $\ell(SP) + \ell(S'P) = 2a$



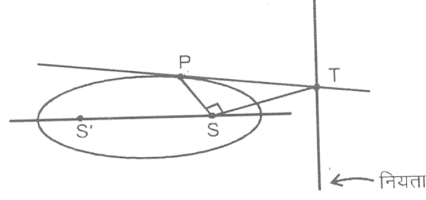
- दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर स्पर्ष रेखा तथा अभिलम्ब, P की नाभिय दूरी के बीच के बाह्य तथा अन्तः कोणों को द्विभाजित करती है। यह दीर्घवृत्त के परावर्तन गुण को निर्दिष्ट करती है जिसके अनुसार एक नाभि से किरण होकर दूसरी नाभि से गुजरती है इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि सरल रेखा रेखा जो कि प्रत्येक नाभि तथा दूसरे नाभि से दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्ष रेखा पर डाले गये लम्ब के पाद बिन्दु को मिलाती है अभिलम्ब PG पर मिलती है तथा उस G बिन्दु पर द्विविभाजित करती है जहाँ P पर अभिलम्ब दीर्घवृत्त को मिलती है।



- दीर्घवृत्त की किसी स्पर्ष रेखा पर नाभियों से डाले गये लम्बों के भागों की लम्बाई का गुणज b^2 है तथा लम्बों के पाद बिन्दु इसके सहायक वृत्त पर स्थित है तथा सहायक वृत्त के पाद बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्ष रेखायें बिन्दु P की कोटि पर मिलती है। तथा इनके प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ दीये गये दीर्घवृत्त के समान होगा।

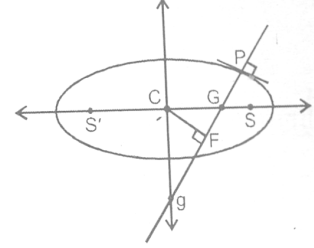


- दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा बिन्दु तथा नियता के बीच का भाग सम्बन्धित नाभि पर समकोण अन्तरिक करता है।



- यदि दीर्घवृत्त जिसका केन्द्र C हो पर स्थित किसी बिन्दु P पर अभिलम्ब दीर्घअक्ष तथा लघुअक्ष को क्रमशः G तथा g पर मिलता है तथा CF इस अभिलम्ब पर लम्ब है, तो

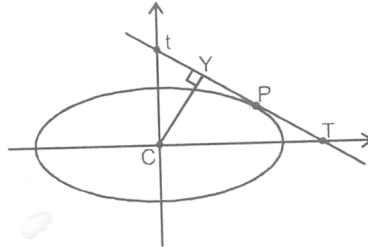
- (i) $PF.PG=b^2$
- (ii) $PF.Pg=a^2$
- (iii) $PG.Pg=SP.S'P$
- (iv) $CG.CT=CS^2$



- (v) Gg के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ एक दूसरा दीर्घवृत्त होगा जिसकी उत्केन्द्रता दिये गये दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता के समान होगी।

[जहाँ S तथा S' दीर्घवृत्त की नाभियाँ हैं, तथा T वह बिन्दु है जहाँ पर स्पर्श रेखा दीर्घ अक्ष को बिन्दु P पर मिलती है।]

- नाभीय दूरी को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त सहायक वृत्त को स्पर्श करता है। केन्द्र से सभी जीवाओं जो दीर्घवृत्त के लम्बवत् व्यासों के अंतिम बिन्दुओं को मिलती हैं, पर डाले गये लम्बों की लम्बाई अचर होती है।
- यदि मानक दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों को T तथा t पर मिलती हो तथा CY केन्द्र से इस पर डाला गया लम्ब हो, तो



(i) $Tt.PY=a^2-b^2$

तथा

(ii) Tt का न्यूनतम मान $a+b$ है।

Exercise -1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. दीर्घवृत्त जिसकी नाभि (1,-1), नियता $x-y-3=0$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ हो, का समीकरण होगा –

(A) $7x^2+2xy+7y^2-10x+10y+7=0$	(B) $7x^2+2xy+7y^2+7=0$
(C) $7x^2+2xy+7y^2+10x-10y-7=0$	(D) इनमें से कोई नहीं
2. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2+8x+36y+4=0$ की उत्केन्द्रता है –

(A) $\frac{5}{6}$	(B) $\frac{3}{5}$	(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$	(D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
-------------------	-------------------	--------------------------	--------------------------
3. यदि नियताओं के मध्य दूरी, नाभियों के मध्य दूरी की तिगुनी हो, तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है –

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	(D) $\frac{4}{5}$
-------------------	-------------------	--------------------------	-------------------
4. दीर्घवृत्त जिसका केन्द्र (1,2), नाभि (6,2) हो तथा (4,6) से गुजरता हो, का समीकरण है –

(A) $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$	(B) $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$
(C) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$	(D) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
5. $x=3(\cos t+\sin t)$, $y=4(\cos t-\sin t)$ द्वारा निरूपित वक्र है :-

(A) दीर्घवृत्त	(B) परवलय	(C) अतिपरवलय	(D) वृत्त
----------------	-----------	--------------	-----------
6. माना दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ जिसकी नाभियाँ S तथा S' है, पर एक चर बिन्दु P हैं यदि त्रिभुज PSS' का क्षेत्रफल A हैं, तो A का अधिकतम मान होगा –

(A) 24 वर्ग इकाई	(B) 12 वर्ग इकाई	(C) 36 वर्ग इकाई	(D) इनमें से कोई नहीं
------------------	------------------	------------------	-----------------------
7. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2-16x-54y+61=0$ के सापेक्ष बिन्दु (1, 3) की स्थिति है –

(A) दीर्घवृत्त के बाहर	(B) दीर्घवृत्त पर	(C) दीर्घवृत्त पर	(D) लघुअक्ष पर
------------------------	-------------------	-------------------	----------------
8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ की स्पर्श रेखा द्वारा निर्देशी अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्ड के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है –

(A) $9x^2+16y^2=4x^2y^2$	(B) $16x^2+9y^2=4x^2y^2$
--------------------------	--------------------------

(C) $3x^2+4y^2=4x^2y^2$

(D) $9x^2+16y^2=x^2y^2$

9. यदि रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलम्ब हों, तो –
 (A) $p^2(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) = a^2 - b^2$ (B) $p^2(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) = (a^2 - b^2)^2$
 (C) $p^2(a^2 \sec^2 \alpha + b^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha) = a^2 - b^2$ (D) $p^2(a^2 \sec^2 \alpha + b^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha) = (a^2 - b^2)^2$
10. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्ब के धनात्मक सिरे पर अभिलम्ब का समीकरण है –
 (A) $x + ey + e^2 a = 0$ (B) $x - ey - e^3 a = 0$ (C) $x - ey - e^2 a = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं
11. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ तथा इसके सहायक वृत्त पर संगत बिन्दु क्रमशः P तथा Q है। दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर अभिलम्ब CQ को बिन्दु R पर मिलता है जहाँ C दीर्घवृत्त का केन्द्र है। तब $\ell(\overline{CR})$ है –
 (A) 5 इकाई (B) 6 इकाई (C) 7 इकाई (D) 8 इकाई
12. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु P पर तथा इसके संगत सहायक वृत्त Q पर खींची गई स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु जिस रेखा पर मिलता है, वह है
 (A) $x = a/e$ (B) $x = 0$ (C) $y = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

13. समीकरण $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 43 = 0$
 (A) C के किसी भी मान के लिए वास्तविक सरल रेखा युग्म को प्रदर्शित नहीं करती है।
 (B) एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करता है, यदि $C > 0$
 (C) कोई भी बिन्दुपथ प्रदर्शित नहीं करता, यदि $C < 0$
 (D) एक बिन्दु, यदि $C = 0$
14. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के दो बिन्दुओं जिनके उत्केन्द्रीय कोण θ व ϕ है, को मिलाने वाली जीवा नाभि से गुजरती है, तो $\tan(\theta/2) \tan(\phi/2)$ का मान है –
 (A) $\frac{e+1}{e-1}$ (B) $\frac{e-1}{e+1}$ (C) $\frac{1+e}{1-e}$ (D) $\frac{1-e}{1+e}$

.....
 1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियों के बीच की दूरी 10 तथा नाभि एवं उसके संगत नियता के बीच की दूरी 15 है।
2. यदि दीर्घवृत्त की नाभि (3,4), उसके संगत नियता $x+y-1=0$ और उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ हो, तो दीर्घअक्ष के सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

3. दीर्घवृत्त $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ का प्राचलिक समीकरण लिखिये।
4. 'α' के उन मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिनके लिए बिन्दु $\left(7 - \frac{5}{4}\alpha, \alpha\right)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ के अन्दर स्थित हों।
5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ की उन स्पर्श (15, -4) की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (15, -4) से गुजरती हो।
6. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्बों के सिरों पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि वे दीर्घअक्ष एवं नियताओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरती है।
7. एक दीर्घवृत्त बिन्दु (4, -1) से गुजरता है तथा रेखा $x+4y-10=0$ को स्पर्श करता है, तो इसका समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि इसके अक्ष निर्देशांक अक्षों के साथ संपाती हो जाए।
8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्ब के सिरे पर अभिलम्ब लघुअक्ष के एक सिरे से गुजरता हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $e^4 + e^2 - 1 = 0$ द्वारा दी जाती है।
9. दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 4$ के बिन्दु P(θ) पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब इसके दीर्घअक्ष को क्रमशः Q तथा R पर मिलते हैं। यदि QR=2 हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि P का उत्केन्द्रीय कोण θ, $\cos\theta = \pm(2/3)$ द्वारा दिया जाता है।
10. यदि $3x+4y=12$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ को P तथा Q पर काटती हो, तो P तथा Q पर स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।
11. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो लघुअक्ष के धनात्मक सिरे से गुजरती हुई खींची जाती है।
12. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर एक चर बिन्दु P इस प्रकार गमन करता है कि P पर स्पर्श रेखा, $x = \frac{25}{3}$ को Q पर प्रतिच्छेद करती है, तो PQ को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त एक स्थिर बिन्दु से गुजरता है। इस स्थिर बिन्दु को ज्ञात कीजिए।
13. दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, दीर्घअक्ष के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं द्वारा बिन्दुओं T तथा T' पर काटती जाती है, तो सिद्ध कीजिए कि वृत्त जिसका व्यास TT' हो, दीर्घवृत्त की नाभि से गुजरेगा।
14. एक किरण बिन्दु (-4, 0) से निकलकर दीर्घवृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ के बिन्दु P जिसका भुज 3 है, पर आपतित होती है, तो

Exercise – 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

- एक वृत्त का केन्द्र दीर्घवृत्त के केन्द्र के समान है तथा दीर्घवृत्त की नाभियों F_1 तथा F_2 से इस प्रकार गुजरता है कि दोनों वक्र 4 बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। माना कि 'P' उनका कोई एक प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष 17 है तथा त्रिभुज PF_1F_2 का क्षेत्रफल 30 हो तो, नाभियों के मध्य दूरी है –
 (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 15
- मानक दीर्घवृत्त के एक बिन्दु जिसका उत्केन्द्रिय कोण $\pi/4$ है, पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब पर इसके केन्द्र से डाले गये लम्बों से निर्मित आयत का क्षेत्रफल है –
 (A) $\frac{(a^2 - b^2)ab}{a^2 + b^2}$ (B) $\frac{(a^2 + b^2)ab}{(a^2 - b^2)}$ (C) $\frac{(a^2 - b^2)}{ab(a^2 + b^2)}$ (D) $\frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)ab}$
- एक दीर्घवृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि इसके दीर्घ अक्ष एवं लघु अक्ष की लम्बाइयों क्रमशः 10 तथा 8 है, इसकी एक नाभि को केन्द्र लेकर एक वृत्त खींचा जाता है जो दीर्घवृत्त को स्पर्श करता है तथा वृत्त का कोई भी भाग दीर्घवृत्त के बाहर नहीं हो, तो वृत्त की त्रिज्या है –
 (A) 2 (B) 3 (C) $\sqrt{3}$ (D) 4
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित बिन्दु जिनके उत्केन्द्रिय कोणों का योग अचर है, पर स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है –
 (A) अतिपरवलय (B) दीर्घवृत्त (C) वृत्त (D) सरल रेखा
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ जिसकी उत्केन्द्रता e है, के एक चर बिन्दु P पर अभिलम्ब दीर्घवृत्त की अक्षों को Q तथा R पर मिलता हो, तो QR के मध्य बिन्दुपथ एक शाकव है जिसकी उत्केन्द्रता e' इस प्रकार है कि –
 (A) e', e (B) $e'=1$ (C) $e'=e$ (D) $e'=1/e$
- यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा पर केन्द्र से डाला गया लम्ब CF है तथा G वह बिन्दु है जहाँ P पर अभिलम्ब, दीर्घ अक्ष को मिलता है, तब CF.PG का मान है –
 (A) a^2 (B) $2b^2$ (C) b^2 (D) $a^2 - b^2$
- समकोण त्रिभुज ABC जो कि A पर समकोण है, इस प्रकार गति करता है कि इसकी भुजाएँ वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को हमेशा स्पर्श करती है, तो बिन्दु A का बिन्दुपथ है –
 (A) $x^2 + y^2 = 2a^2$ (B) $x^2 + y^2 = 2b^2$ (C) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (D) इनमें से कोई नहीं
- बिन्दु O दीर्घवृत्त का केन्द्र है जिसका दीर्घ अक्ष AB तथा लघु अक्ष CD है। बिन्दु F दीर्घवृत्त की एक नाभि है। यदि $OF=6$ तथा त्रिभुज OCF के अन्तः निर्मित वृत्त का व्यास 2 हो, तो गुणन (AB) (CD) का मान है –

(A) 64

(B) 12

(C) 65

(D) 3

एक से अधिक विकल्प सही

9. मानक दीर्घवृत्त जिसकी नाभियों S तथा S' है के किसी बिन्दु P पर स्पर्श रेखा, शीर्षों A तथा A' पर स्पर्श रेखाओं को V तथा V' पर मिलती हो, तो –
 (A) $(AV)(A'V')=b^2$ (B) $(AV)(A'V')=b^2$
 (C) $\angle V'SV=90^\circ$ (D) $V'S'VS$

10. निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?
 (A) दीर्घवृत्त $5x^2+9y^2=45$ के नियामक वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=14$ है।
 (B) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ पर स्थित बिन्दु (0,6) की नाभिय दूरियों का योग 10 है।
 (C) परवलय पर किसी स्पर्श रेखा तथा नाभि से इस पर डाले गये लम्ब का प्रतिच्छेद बिन्दु शीर्ष पर स्पर्श रेखा पर स्थित होता है।
 (D) परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु $(at_1^2, 2at_1)$ तथा नाभि से गुजरने वाली रेखा पुनः इसे बिन्दु $(at_2^2, 2at_2)$ पर मिलती है यदि और केवल यदि $t_1t_2=-1$.

11. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ जिसकी नाभियों S तथा S' है, पर एक बिन्दु P है। मानाकि $\angle PSS'=\alpha$ तथा $\angle PS'S=\beta$ हो, तो –
 (A) $PS+PS'=2a$, यदि $a>b$
 (B) $PS+PS'=2b$, यदि $a<b$
 (C) $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}$
 (D) $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} \left[a - \sqrt{a^2-b^2} \right]$ जब $a>b$

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

- उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियों (2,4) तथा (14,9) है तथा जो x-अक्ष को स्पर्श करता है।
- दीर्घवृत्त $x^2+4y^2=16$ के अन्दर उस बड़े से बड़े वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (1,0) है।
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित उन बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए। जिनकी कोटियों का योग अचर ($=\lambda$) हो।
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ पर स्पर्श रेखा, इसके सहायक वृत्त को उन दो बिन्दुओं पर मिलती है, जिनको मिलाने वाली जीवा केन्द्र पर समकोण अन्तरिक करती है। प्रदर्शित कीजिए कि दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $(1+\sin^2 \theta)^{1/2}$ है।

5. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर दो बिन्दु P तथा Q जिनके उत्केन्द्रीय कोण क्रमशः θ तथा $\theta + \alpha$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल θ से स्वतंत्र है।
6. यदि दीर्घवृत्त की दीर्घ अक्ष पर केन्द्र पर केन्द्र से बराबर दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से गुजरती हुई कोई दो जीवाएँ खींची जाती हैं, तो प्रदर्शित कीजिए कि $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} \cdot \tan \frac{\delta}{2} = 1$ जहाँ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ जीवाओं के सिरों के उत्केन्द्रीय कोण हैं।
7. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा दीर्घ अक्ष को T पर प्रतिच्छेद करती है। तथा P से उसी अक्ष पर डाले गये लम्ब का पाद N है। प्रदर्शित कीजिए कि NT को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त को लाम्बिक प्रतिच्छेद करता है।
8. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिससे दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं रेखाओं की स्पर्श जीवा वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ को स्पर्श करती है, जहाँ $c < b < a$ ।
9. प्रदर्शित कीजिए कि रेखा $px + qy + 1 = 0$ और दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)(p^2 a^2 + q^2 b^2 - 1) = (px + qy + 1)^2$ है।
10. यदि θ दीर्घवृत्त पर किसी बिन्दु P का उत्केन्द्रीय कोण है तो CP तथा बिन्दु P पर अभिलम्ब के बीच के कोण की स्पर्शज्या ज्ञात कीजिए। तथा यह भी सिद्ध कीजिए कि इसका अधिकतम मान $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$ है।

Exercise – 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1. मिलना कीजिए।
- | स्तम्भ-I | स्तम्भ-II |
|---|-----------|
| (A) यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ की एक जीवा का मध्य बिन्दु (0,3) है, तब जीवा की लम्बाई $\frac{4k}{5}$ है, तो k है | (p) 6 |
| (B) दीर्घवृत्त $x^2 + 3y^2 = 6$ के केन्द्र से 2 इकाई दूरी पर दीर्घवृत्त पर स्थित बिन्दुओं में एक का उत्केन्द्रीय कोण $\frac{k\pi}{4}$ है, तो k है | (q) 8 |
| (C) यदि एक दीर्घवृत्त के नाभि तथा संगत नियता के मध्य | (r) 3 |

दूरी 8 है तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है, तब लघुअक्ष की लम्बाई $\frac{k}{\sqrt{3}}$ है, तो k है

(D) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ के एक बिन्दु से नाभिय दूरियों का योग है (s) 16

2. एक स्पर्ष रेखा जिसकी प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$ को बिन्दु P पर स्पर्ष करती है तथा दीर्घ तथा दीर्घ

तथा लघु को क्रमशः A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है। दीर्घवृत्त का केन्द्र O है।

स्तम्भ-I

स्तम्भ-II

(A) समान्तर स्पर्ष रेखाओं जिनकी प्रवणता $-\frac{4}{3}$ है, के मध्य दूरी है -

(p) 24

(B) ΔAOB का क्षेत्रफल है -

(q) 7/24

(C) यदि प्रथम चतुर्थांश में स्पर्ष रेखा दीर्घवृत्त को (h,k) पर स्पर्ष करती है, तो hk का मान है -

(r) 48/5

(D) यदि धनात्मक अक्ष को प्रतिच्छेद करने वाली स्पर्ष का समीकरण $\ell x + my = 1$ है, तो $\ell + m =$

(s) 12

3-B (कथन/कारण)

3. कथन-1 : एक दीर्घवृत्त की स्पर्ष रेखा का स्पर्ष बिन्दु तथा नियता के मध्य वाला भाग संगत नाभि पर समकोण अन्तरिक करता है।

कथन-2 : मानक दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) के बिन्दु P पर स्पर्ष रेखा अक्षों को T तथा t पर मिलती है, तब Tt का न्यूनतम मान a-b है -

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. कथन-1 : किसी नाभिय जीवा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त को स्पर्ष करता है।

कथन-2 : यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a < b$) पर कोई बिन्दु P है जहां S तथा S' इसकी नाभियाँ हैं,य तब $\ell(SP) + \ell(S'P) = 2b$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. कथन-1 : दीर्घअक्ष 4 तथा लघुअक्ष 2 वाला एक दीर्घवृत्त दोनों निर्देशी अक्षों को स्पर्श करता है इसकी नाभि का बिन्दुपथ $(x^2+y^2)(1+x^2)^2=20x^2y^2$ है।
 कथन-2 : एक नाभिय जीवा के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ संगत नियता होती है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।
6. कथन-1 : दीर्घअक्ष 4 तथा लघुअक्ष 2 वाला एक दीर्घवृत्त दोनों निर्देशी अक्षों को स्पर्श करता है। इसके केन्द्र का बिन्दुपथ वृत्त $x^2+y^2=5$
 कथन-2 : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का नियामक वृत्त $x^2+y^2=a^2+b^2$ है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. अनुच्छेद
 मना एक दीर्घवृत्त 'E' की $S \equiv (4,3)$ तथा S' नाभियों है जो कि अतिपरवलय 'H' जिसकी नाभियाँ S_1 तथा S_1' हैं को बिन्दु $P \equiv (1,2)$ पर स्पर्श करता है। यदि S_1 अतिपरवलय 'H' के बिन्दु $P \equiv (1,2)$ पर स्पर्श रेखा $x+y-3=0$ के सापेक्ष S का प्रतिबिम्ब है तथा दीर्घवृत्त 'E' के केन्द्र का x-निर्देशांक 7 है, तब
- 7.1 दीर्घवृत्त 'E' का सहायक वृत्त है -
 (A) $(x-7)^2+(y-15)^2=221$ (B) $(x-7)^2+(y-16)^2=250$
 (C) $(x-7)^2+(y-14)^2=221$ (D) $(x-7)^2+(y-7)^2=61$
- 7.2 दीर्घवृत्त 'E' की उत्केन्द्रता है -
 (A) $\sqrt{\frac{89}{125}}$ (B) $\sqrt{\frac{173}{250}}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 7.3 S_1 तथा S' को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है -
 (A) $3x-4y-4=0$ (B) $3x-y-1=0$ (C) $4x-y-1=0$ (D) $5x+2y+2=0$

8. अनुच्छेद

एक दीर्घवृत्त $\frac{(3x-4y+10)^2}{2} + \frac{(4x+3y-15)^2}{3} = 1$ है।

- 8.1 दीर्घवृत्त के दीर्घवृत्त है -
 (A) 6 तथा 4 (B) 150 तथा 100 (C) $10\sqrt{3}$ $10\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
- 8.2 दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है -
 (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (D) इनमें से कोई नहीं

8.3 दीर्घवृत्त का केन्द्र है –

- (A) (0, 0) (B) $\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ है।
10. दीर्घवृत्त $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ तथा वृत्त $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई शून्य है।
11. बिन्दु, जहाँ रेखा $5x - 3y = 8\sqrt{2}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ का अभिलम्ब है, का उत्केन्द्रीय कोण $\frac{\pi}{2}$ है।
12. दीर्घवृत्तों $3x^2 + 5y^2 = 32$ तथा $25x^2 + 9y^2 = 450$ पर बिन्दु (3, 5) से गुजरने वाली वास्तविक स्पर्श रेखाओं की संख्या 2 है।
13. यदि $\tan\theta_1, \tan\theta_2 = -\frac{a^2}{b^2}$ तब, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के दो बिन्दुओं θ_1 तथा θ_2 को मिलाने वाली जीवा केन्द्र पर समकोण अन्तरित करती है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ की नियताओं के मध्य दूरी है।
15. एक दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{5}{8}$ है तथा इसकी नाभियों के मध्य दूरी 10 है, तब इसका नाभिलम्ब है।
16. एक दीर्घवृत्त जो सरल रेखा $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ को x-अक्ष पर तथा सरल रेखा $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ को y-अक्ष पर मिलता है, की उत्केन्द्रता है जिसके अक्ष निर्देशी के अनुदिश है।
17. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की किसी स्पर्श तथा निर्देशी अक्षों से बनाये गये त्रिभुज का न्यूनतम क्षेत्रफल है।

18. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के केन्द्र से $\sqrt{a^2 - b^2}$ दूरी पर लघु अक्ष पर स्थित दो बिन्दुओं से दीर्घवृत्त की किसी स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्बों के वर्गों का योग है।

Exercise – 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2008

1. माना दीर्घवृत्त (ellipse) $x^2 + 4y^2 = 4$ के नाभिलंब के अन्त्य बिन्दु (end points) $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$, $y_1 < 0$, $y_2 < 0$, है। PQ नाभिलंब वाले परवलयों (parabolas) के समीकरण निम्न हैं
- (A) $x^2 + 2\sqrt{3}y = 3 + \sqrt{3}$ (B) $x^2 - 2\sqrt{3}y = 3 + \sqrt{3}$
 (C) $x^2 + 2\sqrt{3}y = 3 - \sqrt{3}$ (D) $x^2 - 2\sqrt{3}y = 3 - \sqrt{3}$

IIT-JEE-2005

2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा एवं अक्षों से निर्मित त्रिभुज का न्यूनतम क्षेत्रफल है –
- (A) ab वर्ग इकाई (B) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ वर्ग इकाई
 (C) $\frac{(a+b)^2}{2}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{a^2 + ab + b^2}{3}$ वर्ग इकाई
3. एक दीर्घवृत्त का अर्ध लघु अक्ष OB तथा नाभियों F एवं F' है। तथा कोण FBF' समकोण हैं, तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है –
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{2}$
4. प्रथम चतुर्थांश में, वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ एवं दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा ज्ञात कीजिये। स्पर्श रेखा के अक्षों के मध्य काटे गये अन्तः खण्ड AB की लम्बाई भी ज्ञात करो।

IIT-JEE-2004

5. किसी बाह्य बिन्दु से दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 2$ पर खींची गई स्पर्श रेखा द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है–
- (A) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y^2} = 1$ (B) $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2y^2} = 1$ (C) $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$ (D) $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$
6. एक दीर्घवृत्त जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है कि उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है। यदि इसकी एक नियता $x=4$ हो, तो दीर्घवृत्त का समीकरण है –
- (A) $3x^2 + 4y^2 = 1$ (B) $3x^2 + 4y^2 = 12$ (C) $4x^2 + 3y^2 = 12$ (D) $4x^2 + 3y^2 = 1$

7. $x^2+2y^2=6$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो रेखा $x+y=7$ के नजदीक हो।

IIT-JEE-2002

8. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त से नाभि से किसी स्पर्श रेखा पर लम्ब तथा दीर्घवृत्त के केन्द्र को स्पर्श बिन्दु से मिलाने वाली रेखा संगत नियता पर मिलती है।

IIT-JEE-2001

9. माना बिन्दु P दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a$ पर स्थित है। तथा y-अक्ष के समान्तर P से जाने वाली रेखा वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को बिन्दु Q पर मिलती है ताकि P एवं Q, x-अक्ष के एक ओर हो। दो धनात्मक एवं वास्तविक संख्याओं r एवं s के लिए PQ पर स्थित बिन्दु R का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए। जबकि P दीर्घवृत्त पर गति करता हो तथा $PR : RQ = r : s$ हो।

10. माना दो वृत्त C_1 एवं C_2 इस प्रकार है कि C_2 वृत्त C_1 के अन्दर स्थित है। C_1 के अन्दर एक अन्य वृत्त C, वृत्त C_1 को आन्तरिक रूप से स्पर्श करता है और वृत्त C_2 के बाह्य स्पर्श करता है। तो वृत्त C के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2000

11.

(i) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ के नाभिलम्ब के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाओं से निर्मित चतुर्भुज का क्षेत्रफल है -

- (A) 27/4 वर्ग इकाई (B) 9 वर्ग इकाई (C) 27/2 वर्ग इकाई (D) 27 वर्ग इकाई

(ii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1$ के बिन्दु $(3\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta)$ जहाँ $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ पर स्पर्श रेखा खींची जाती है। तब θ का वह मान जिसके लिए इस स्पर्श रेखा द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डों का योग न्यूनतम है।

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

12. माना वृत्त $x^2+y^2=a^2$ में एक समबाहु त्रिभुज ABC बनाया जाता है। यदि A, B, C से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$ के दीर्घअक्ष पर लम्ब दीर्घवृत्त को क्रमशः P, Q, R पर इस प्रकार मिलते हैं कि दीर्घअक्ष के अनुदिश जिस तरफ A, B व C है उसी तरफ क्रमशः P, Q व R है, तो सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त के बिन्दु P, Q, R पर अभिलम्ब संगामी है।

IIT-JEE-1999

13. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2=1$ पर वे बिन्दु जिन पर स्पर्श रेखाएँ, रेखा $8x=9y$ के समान्तर हो, हो -

- (A) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ (B) $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ (C) $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ (D) $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$

14. माना वृत्त समूह $x^2+y^2=r^2, 2 < r < 5$ है। यदि प्रथम चतुर्थांश में वृत्त समूह के एक वृत्त एवं दीर्घवृत्त $4x^2+25y^2=100$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा निर्देशी अक्षों को A एवं B पर मिलती हो, तो AB के मध्य बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।
15. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित उन सभी बिन्दुओं P के निर्देशांक ज्ञात करो जिनके लिए त्रिभुज PON का क्षेत्रफल अधिकतम है, जहाँ O मूलबिन्दु है और मूलबिन्दु से P पर स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब का पाद N है।

IIT-JEE-1998

16. (i) यदि रेखा $y=4x+c$ वक्र $(x^2/4)+y^2=1$ को स्पर्श करती है, तो c के मानों की संख्या है –
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त
- (ii) यदि $P=(x,y)$, $F_1=(3,0)$, $F_2=(-3, 0)$ एवं $16x^2+25y^2=400$ हो, तो PF_1+PF_2 का मान है –
 (A) 8 (B) 6 (C) 10 (D) 12

IIT-JEE-1997

17. दीर्घवृत्त $x^2+4y^2=4$ की एक स्पर्श रेखा दीर्घवृत्त $x^2+2y^2=6$ को बिन्दु P एवं Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $x^2+2y^2=6$ के बिन्दु P एवं Q पर स्पर्श रेखाएँ समकोण बनाती है।

IIT-JEE-1996

18. यदि परवलय $y^2=4x$ के बिन्दु $(t^2, 2t)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा, दीर्घवृत्त $4x^2+5y^2=20$ के बिन्दु $(\sqrt{5} \cos \phi, 2 \sin \phi)$ पर खींचे गए अभिलम्ब के समान हो, तो t एवं ϕ के मान ज्ञात कीजिए

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

19. एक वक्र के बिन्दु $P(x,y)$ पर अभिलम्ब x-अक्ष पर G पर मिलता है। यदि G की मूलबिन्दु से दूरी बिन्दु P के भुज की दो गुना है, तब वक्र है –
 (A) दीर्घवृत्त (B) परवलय (C) वृत्त (D) अतिपरवलय
20. परवलय $y^2=8x$ की एक स्पर्श रेखा का समीकरण $y=x+2$ है। इस रेखा पर वह बिन्दु, जहाँ से परवलय पर दी गई स्पर्श रेखा के लम्बवत् दूसरी स्पर्श रेखा खींची जाती है, है –
 (A) (-1, 1) (B) (0, 2) (C) (2, 4) (D) (-2, 0)
21. एक दीर्घवृत्त में, नाभियों के मध्य दूरी 6 है लघु अक्ष 8 है, तब इसकी उत्केन्द्रता है –
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{3}{5}$
22. एक दीर्घवृत्त में OB अर्द्धलघु अक्ष है F तथा F' इसकी नाभियाँ तथा कोण FBF' एक समकोण है तब दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है –

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

23. एक दीर्घवृत्त, जिसका केन्द्र मूल बिन्दु है की उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है यदि कोई एक नियता $x=4$ है तो दीर्घवृत्त का समीकरण है –
 (A) $3x^2+4y^2=1$ (B) $3x^2+4y^2=12$ (C) $4x^2+3y^2=12$ (D) $4x^2+3y^2=1$
24. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा अतिपरलवय $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = \frac{1}{25}$ की नाभियों सम्पाती है तो b^2 का मान है –
 (A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9
25. बिन्दु (1, 2) से दीर्घवृत्त $3x^2+2y^2=5$ पर खींचे गये स्पर्श रेखा युग्म के मध्य का कोण है –
 (A) $\tan^{-1}(12\sqrt{5})$ (B) $\tan^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)$ (C) $\tan^{-1}(6\sqrt{5})$ (D) $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$
26. दीर्घवृत्त $9x^2+7y^2=63$ के दीर्घ अक्ष की लम्बाई है –
 (A) $2\sqrt{7}$ (B) 6 (C) 9 (D) 3
27. बिन्दु (3, 5) से गुजरने वाली दीर्घवृत्तों $3x^2+5y^2=32$ तथा $25x^2+9y^2=450$ पर खींची जा सकने वाली वास्तविक स्पर्श रेखाओं की संख्या है –
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Answers

EXERCISE # 1-A

1. A 2. D 3. C 4. A 5. A 6. B 7. C
 8. A 9. D 10. B 11. C 12. C 13. ABCD
 14. AB

EXERCISE # 1-B

1. $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ 2. ((2,3) & (6,7))
 3. $(x=3+5 \cos \theta, y=-2+4 \sin \theta)$
 4. $\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$
 5. $4x+5y=40, 4x-35y=200$

6. $ex \pm y = a, -ex \pm y = a$

7. $x^2+64y^2=80$ & $x^2+4y^2=20$

10. $\left(\frac{25}{4}, \frac{16}{3}\right)$ 11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{y}{b}$

12. (3,0)

14. $12x+5y=48; 12x-5y=48$

EXERCISE # 2-A

1. C2. A3. A4. D5. C6. C

7. C8. C9. ACD10. ACD11. ABC

EXERCISE # 2-B

1. $\frac{13}{\sqrt{313}}$ 2. $(x-1)^2 + y^2 = \frac{11}{3}$ 1. BC 2. A 3. C 4. $AB = \frac{14}{\sqrt{3}}$ 5. B 6. B
 3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2y}{\lambda}$ 8. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{c^2}$ 7. (2,1) 9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(r+s)^2}{(ra+sb)^2} = 1$ 10. ellipse

EXERCISE # 3

1. (A)→(q), (B)→(r), (C)→(s), (D)→(q)
 2. (A)→(r), (B)→(p), (C)→(s), (D)→(q)
 3. C 4. D 5. B 6. A 7.1 B 7.2 A 7.3 B
 8.1 D 8.2 A 8.3 B 9. True 10. True
 11. False 12. False 13. True 14. 18 15. $\frac{39}{4}$
 16. $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ 17. ab 18. $2a^2$

11. (i) D (ii) B 13. BD 14. $25y^2 + 4x^2 = 4x^2y^2$

15. $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ 16. (i) C (ii) C

18. $\phi = \pi - \tan^{-1} 2, t = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \phi = \pi + \tan^{-1} 2$

$t = \frac{1}{\sqrt{5}}; \phi = \pm \frac{\pi}{2}, t=0]$

19. AD 20. D 21. D 22. D 23. B 24. C 25. C

26. A 27. C

EXERCISE # 4

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक सही विकल्प

1. दो बिन्दु $P(\theta)$ एवं $Q\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित हो, तो PQ के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ होगा –
 (A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ (B) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$ (C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ (D) इनमें से कोई नहीं
2. किसी दीर्घवृत्त की नाभिय जीवा के सिरो के उत्केन्द्रीय कोण क्रमशः α एवं β हो तो इस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता होगी –
 (A) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$ (B) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ (C) $\sec \alpha + \sec \beta$ (D) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$
3. दीर्घवृत्तों $3x^2 + 5y^2 = 32$ एवं $25x^2 + 9y^2 = 450$ के लिये बिन्दु (3,5) से गुजरने वाली खींचीर जा सकने वाली वास्तविक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है –
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ में अन्तरित समबाहु त्रिभुज जिसके शीर्षों के उत्केन्द्रता कोण क्रमशः α, β, γ हैं, के परिकेन्द्र के निर्देशांक (x_1, y_1) हैं, तो $\sum \cos \alpha \cos \beta + \sum \sin \alpha \sin \beta =$
- (A) $\frac{9x_1^2}{a^2} + \frac{9y_1^2}{b^2} + \frac{3}{2}$ (B) $9x_1^2 - 9y_1^2 + a^2b^2$
- (C) $\frac{9x_1^2}{a} + \frac{9y_1^2}{b} + 3$ (D) $\frac{9x_1^2}{2a^2} + \frac{9y_1^2}{2b^2} - \frac{3}{2}$
5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ एवं अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ के नियामक वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः $2r$ एवं r तथा उत्केन्द्रताएँ क्रमशः e_e एवं e_h हैं, तो –
- (A) $2e_h^2 - e_e^2 = 6$ (B) $e_e^2 - 4e_h^2 = 6$ (C) $4e_h^2 - e_e^2 = 6$ (D) इनमें से कोई नहीं
6. दीर्घवृत्त $x^2/6 + y^2/2 = 1$ पर स्थित बिन्दु $(\sqrt{6} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$ की उसके केन्द्र से दूरी 2 हो तो –
- (A) $\theta = \pi/3$ (B) $\theta = \pi/6$ (C) $\theta = 5\pi/4$ (D) $\theta = 5\pi/3$
7. दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 36$ के किसी बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा, इसके दीर्घअक्ष के सिरो पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं को क्रमशः T एवं T' पर काटती है। TT' को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त जिस बिन्दु से गुजरता है, वह है –
- (A) $(-\sqrt{5}, 0)$ (B) $(\sqrt{5}, 1)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(3, 2)$
8. दीर्घवृत्त $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ एवं वृत्त $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है –
- (A) शून्य (B) एक (C) तीन (D) आठ
9. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिये, $ax - by = 0$ का संयुग्मी व्यास का समीकरण है –
- (A) $bx + ay = 0$ (B) $bx - ay = 0$ (C) $a^3y + b^3x = 0$ (D) $a^3y - b^3x = 0$
10. यदि कोई दीर्घवृत्त सरल रेखा $2x - 3y = 6$ को x-अक्ष पर तथा रेखा $4x + 5y = 20$ को y-अक्ष पर काटता है और इसकी अक्ष, निर्देशी अक्षों के अनुदिश है तो इस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता होगी –
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$
11. दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की स्पर्श रेखा $y = x - 1$ के स्पर्श बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी है –
- (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (D) इनमें से कोई नहीं

12. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ पर स्थित उस बिन्दु का उत्केन्द्र कोण जो नाभि से धनात्मक से धनात्मक x-अक्ष की ओर $\frac{5}{4}$ इकाई दूरी पर है, होगा –
- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं
13. दीर्घवृत्त $b^2x^2 + y^2 = a^2b^2$ के नाभिलम्ब के सिरो का बिन्दुपथ होगा जबकि b एक प्रॉचल है – ($b^2 < 1$)
- (A) $x^2 \pm a^2y^2 = a^2$ (B) $x^2 \pm ay = a^2$ (C) $x \pm ay^2 = a^2$ (D) इनमें से कोई नहीं
14. रेखा $2px + y\sqrt{1-p^2} = 1$, ($|p| < 1$), p के विभिन्न मानों के लिये स्पर्श करती है –
- (A) एक दीर्घवृत्त को जिसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{3}/2$ है (B) एक दीर्घवृत्त को जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{2}{\sqrt{3}}$ है।
 (C) एक अतिपरवलय को जिसकी उत्केन्द्रता 2 है। (D) p के मान के अनुसार एक दीर्घवृत्त या एक अतिपरवलय को।
15. संकेन्द्रीय दीर्घवृत्त E_1, E_2, \dots, E_n इस प्रकार खींचे गये हैं कि दीर्घवृत्त E_n दीर्घवृत्त E_{n-1} के दीर्घ अक्ष के सिरो को स्पर्श करता है तथा E_n की नाभियों E_{n-1} के लघुअक्ष के सिरो से संपाती है। यदि दीर्घवृत्तों की उत्केन्द्रताएँ, n पर निर्भर नहीं करती है तो उत्केन्द्रताएँ का मान होगा –
- (A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

एक या अधिक सही सही विकल्प

16. a के मानों का समुच्चय जिसके लिये $(13x-1)^2 + (13y-2)^2 = a(5x+12y-1)^2$ एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करता है –
- (A) $1 < a < 2$ (B) $0 < a < 1$ (C) $2 < a < 3$ (D) इनमें से कोई नहीं
17. यदि $(5,12)$ और $(24,7)$ मूल बिन्दु से गुजरने वाली किसी शाकव की नाभियों हो तो, ऐसे शाकव की उत्केन्द्रता है –
- (A) $\frac{\sqrt{386}}{38}$ (B) $\frac{\sqrt{386}}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{386}}{13}$ (D) $\frac{\sqrt{386}}{25}$
18. F_1, F_2 नाभियों वाले दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर खींची गयी स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब क्रमशः PT एवं PN हो तो –
- (A) PN कोण $\angle F_1PF_2$ को समद्विभाजित करता है।
 (B) PT कोण $\angle F_1PF_2$ को समद्विभाजित करता है।
 (C) PT कोण $(180^\circ - \angle F_1PF_2)$ को समद्विभाजित करता है।
 (D) इनमें से कोई नहीं
19. $x^2 + 9y^2 = 25$ का कोई व्यास AB है। A का उत्केन्द्र कोण $\pi/6$ है तो B का उत्केन्द्र कोण होगा –
- (A) $7\pi/6$ (B) $-5\pi/6$ (C) $-2\pi/3$ (D) इनमें से कोई नहीं
20. दीर्घवृत्त $x^2 \tan^2 \alpha + y^2 \sec^2 \alpha = 1$ के नाभिलम्ब की लम्बाई $1/2$ है तो $\alpha (0 < \alpha < \pi)$ का मान है –

- (A) $\pi/12$ (B) $\pi/6$ (C) $5\pi/12$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. एक दीर्घवृत्त की किसी जीवा के सिरे कर्मणः $A(\alpha)$ तथा $B(\beta)$ है। यदि दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु $C(\theta)$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा की प्रवणता AB की प्रवणता के बराबर हो तो θ का मान होगा –

- (A) $\frac{\alpha + \beta}{2}$ (B) $\frac{\alpha - \beta}{2}$ (C) $\frac{\alpha + \beta}{2} + \pi$ (D) $\frac{\alpha - \beta}{2} - \pi$

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

- परवलय $y^2=4x$ के बिन्दु $(t^2, 2t)$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा दीर्घवृत्त $4x^2+5y^2=20$ पर स्थित बिन्दु $(\sqrt{5} \cos \phi, 2\sin \phi)$ पर खींचा गया अभिलम्ब ही है तो t एवं ϕ के मान ज्ञात कीजिए।
- दीर्घवृत्त $x^2+4y^2=16$ में आन्तरिक किये जा सकने वाले सबसे बड़े वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका केन्द्र $(1, 0)$ है।
- सरल रेखा $px+qy=r$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को जिन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है उनके उत्केन्द्र कोणों के मध्य अन्तर $\frac{\pi}{4}$ होने के लिये प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये।
- सिद्ध कीजिये कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गयी किसी स्पर्श रेखा पर अक्षों द्वारा काटे गये अन्तः खण्ड की न्यूनतम लम्बाई $(a+b)$ होगी।
- कोई बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि दो निश्चित रेखाओं जिनके मध्य कोण 2α है से उसकी दूरियों के वर्गों का योग अचर रहता है। तो सिद्ध कीजिए कि इस बिन्दु का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त होगा जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos \alpha}$ होगी यदि $\alpha < \frac{\pi}{4}$ हो तथा $\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}$ होगी यदि $\alpha > \frac{\pi}{4}$
- सिद्ध कीजिये कि एक दीर्घवृत्त के लिये, किसी दी गयी दिशा में खींची गयी जीवा के सिरो के उत्केन्द्र कोणों का योग अचर रहता है। तथा यह उस बिन्दु के उत्केन्द्र कोण का दुगुना होता है जिस पर खींची गयी स्पर्श रेखा दी गयी दिशा के समान्तर होती है।
- बिन्दु $P(h,k)$ से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् है। यदि उनके स्पर्श बिन्दुओं पर खींचे गये अभिलम्ब परस्पर बिन्दु $Q(\alpha, \beta)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि $h\beta - k\alpha = 0$
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के परिगत एक समान्तर चतुर्भुज इस प्रकार है कि इसके दो विपरीत शीर्ष रेखाओं $x^2=c^2$ पर स्थित है। इस समान्तर चतुर्भुज के अन्य दो शीर्षों का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये।
- एक दीर्घवृत्त के बिन्दुओं $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ पर खींचे गये अभिलम्ब संगामी है तो सिद्ध कीजिये कि $(\sum \cos \alpha)(\sum \sec \alpha) = 4$

10. सरल रेखाएँ $\frac{x}{al} + \frac{y}{bm} = -1$ तथा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिये कि इस प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर खींचे गये अभिलम्ब संगामी होंगे।

Answers

EXERCISE # 1

1. A 2. D 3. A 4. D 5. C 6. C 7. A

8. A 9. C 10. D 11. C 12. D 13. B 14. A

15. B 16. B 17. AB 18. AC 19. AB 20. AC

21. AC

EXERCISE # 2

1. $\phi = \pi = \tan^{-1} 2, t = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \phi = \pi + \tan^{-1} 2,$

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}}; \phi = \pm \frac{\pi}{2}, t = 0$$

2. $(x-1)^2 + y^2 = \frac{11}{3}$

3. $a^2p^2 + b^2q^2 = r^2 \sec^2 \frac{\pi}{8} = (4 - 2\sqrt{2})r^2$

8. $\frac{a^2y^2}{b^2c^2} = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \right) \right\} \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right\}$

**for 39 Yrs. Que. of
IIT-JEE(ADVANCE)**

&

**15 Yrs. Que. of
AIEEE(MAIN)**

**we have distributed
already a book**